

4 Reprendre l'exercice **3** avec la suite (u_n) définie, pour tout entier $n > 0$, par $u_n = \frac{2}{n}$.

1. a. Construire dans un repère les quatre premiers termes de la suite (u_n) .

b. Conjecturer le sens de variation de la suite.

2. a. Exprimer u_{n+1} en fonction de n .

b. En déduire $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n .

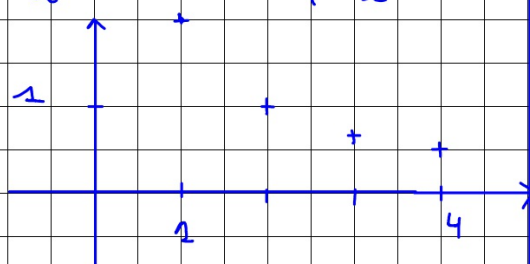
c. Démontrer la conjecture de la question **1. b.**

$$1) a) u_1 = \frac{2}{1} = 2$$

$$u_3 = \frac{2}{3}$$

$$u_2 = \frac{2}{2} = 1$$

$$u_4 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



b) Conjecture: (u_n) semble $\searrow$.

$$2) a) u_{n+1} = \frac{2}{n+1}$$

$$\begin{aligned} b) u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = \frac{2 \times n - 2 \times (n+1)}{n \times (n+1)} \\ &= \frac{2n - 2(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{-2}{n(n+1)} < 0 \text{ pour } n \geq 1. \end{aligned}$$

$$c) u_{n+1} - u_n < 0 \text{ dc } (u_n) \searrow$$

5 On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = 7n - 14$$

1. Déterminer la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ telle que $v_n = f(n)$.

2. Étudier les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$.

3. En déduire les variations de la suite (v_n) .

1) $v_n = 7n - 14 = f(n)$
avec f def par $f(x) = 7x - 14$

2) f est affine de coef $7 > 0$
de f est croissante sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^+$. dc $(v_n) \nearrow$.

3) Dc $(v_n) \nearrow$.

6 Étudier les variations de la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier $n \geq 0$, par :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{1}{n+1}$$

Signe de $u_{n+1} - u_n$?

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \cancel{u_n} - \frac{1}{n+1} - \cancel{u_n} \\ &= -\frac{1}{n+1} < 0 \text{ sur } \mathbb{N}. \end{aligned}$$

dc $(u_n) \searrow$.

48 1. $u_n = 3^n$

2. $u_n = -\frac{4}{n^2} \quad (n \geq 1)$

3. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} \end{cases}$

4. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - n^2 \end{cases}$

1) 1^{re} méthode: Signe de $u_{m+1} - u_m$

$$u_{m+1} - u_m = 3^{m+1} - 3^m \quad | \quad a^{m+1} - a^m = a \times a^m$$

$$= 3^m \times 3 - 3^m$$

$$= 3^m (3 - 1) = 3^m \times 2 > 0$$

dc (u_m) $\uparrow$

2^e méthode: $u_m = 3^m > 0$

$$\frac{u_{m+1}}{u_m} = \frac{3^{m+1}}{3^m} = 3^{m+1-m} = 3 > 1$$

dc (u_m) $\uparrow$

2) Signe de $u_{m+1} - u_m$?

$$u_{m+1} - u_m = -\frac{4}{(m+1)^2} - \left(-\frac{4}{m^2}\right)$$

$$= -\frac{4 \times m^2}{m^2 \times (m+1)^2} + \frac{4(m+1)^2}{m^2 \times (m+1)^2}$$

$$= \frac{-4m^2 + 4(m^2 + 2m + 1)}{m^2(m+1)^2}$$

$$= \frac{-4\cancel{m^2} + 4\cancel{m^2} + 8m + 4}{m^2(m+1)^2}$$

$$= \frac{8m+4}{m^2(m+1)^2} > 0 \text{ pour } m \in \mathbb{N}$$

dc (u_m) $\uparrow$

$$3. \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1} \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n - n^2 \end{cases}$$

$$3) u_{m+1} - u_m = \cancel{u_m} + \frac{1}{m+1} - \cancel{u_m} \\ = \frac{1}{m+1} > 0 \text{ p.k. } m \in \mathbb{N}$$

de. $(u_m) \nearrow$.

$$4) u_{m+1} - u_m = \cancel{u_m} - m^2 - \cancel{u_m} \\ = -m^2 \leq 0 \text{ p.k. } m \in \mathbb{N}.$$

de. $(u_m) \searrow$.

m° 50

2. Application. En utilisant cette propriété, étudier le sens de variation des suites définies sur $\mathbb{N}$ par :

a. $u_n = 5^n$ b. $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ c. $w_n = \frac{5^n}{3^{n+1}}$ d. $t_n = \frac{4n}{2^n}$

a) $u_n = 5^n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5 > 1 \text{ dc } (u_n) \uparrow$$

b) $v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3} < 1 \text{ dc } (v_n) \downarrow$$

On cherche à comparer $\frac{n+1}{2^n}$ à 1 pour cela on étudie le signe de $\frac{n+1}{2^n} - 1$.

$$\frac{n+1}{2^n} - 1 = \frac{1 \times 2^n - n - 1}{1 \times 2^n} = \frac{1 - n}{2^n} \quad \text{②}$$

$n \geq 1$ dc $1 - n \leq 0$

ainsi $\frac{1-n}{2^n} \leq 0$ dc $\frac{n+1}{2^n} - 1 \leq 0$

d'où $\frac{n+1}{2^n} \leq 1$ et $(t_n) \downarrow$.

c) $w_n = \frac{5^n}{3^{n+1}} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \frac{w_{n+1}}{w_n} &= \frac{\frac{5^{n+1}}{3^{n+2}}}{\frac{5^n}{3^{n+1}}} = \frac{5^{n+1}}{3^{n+2}} \times \frac{3^{n+1}}{5^n} \\ &= \frac{5^{n+1}}{5^n} \times \frac{3^{n+1}}{3^{n+2}} \\ &= 5^{n+1-n} \times 3^{n+1-(n+2)} \\ &= 5 \times 3^{n+1-n-2} \\ &= 5 \times 3^{-1} \\ &= 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} > 1 \text{ dc } (w_n) \uparrow \end{aligned}$$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$

d) $t_n = \frac{4n}{2^n} > 0 \forall n \in \mathbb{N}, n \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{t_{n+1}}{t_n} &= \frac{\frac{4(n+1)}{2^{n+1}}}{\frac{4n}{2^n}} = \frac{4(n+1)}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{4n} \\ &= \frac{4(n+1) \times 2^n}{4n \times 2^{n+1}} = \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

$= \frac{1}{2}$

2^e méthode - Signe de $t_{n+1} - t_n$.

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= \frac{4(n+1)}{2^{n+1}} - \frac{4n \times 2}{2^n \times 2} \\ &= \frac{4n+4-8n}{2^{n+1}} \\ &= \frac{-4n+4}{2^{n+1}} = \frac{4(-n+1)}{2^{n+1}} < 0 \end{aligned}$$

$n \geq 1$ dc $1-n \leq 0$.

d'où $(t_n) \searrow$.

Cours **Ch. 7** (suite et fin).

III Notion de limite d'une suite.

↳ comment se comportent les termes u_n qd n devient infiniment grand.

exemples: 1) $u_n = n^2$

qd n devient infiniment grand, les termes u_n deviennent eux aussi infiniment grands " u_n tend vers $+\infty$ ".

2) $v_n = -n^3$

qd n devient infiniment grand v_n deviennent infiniment grand en valeur absolue mais négatifs.
" u_n tend vers $-\infty$ ".

3) $w_n = (-2)^n$

pb: si n pair, w_n devient inf. qd:
si n impair, w_n "
en val. absolue mais négatif.

4) $t_n = 2 - \frac{3}{n}$

qd n devient inf. qd, u_n se rapproche indéfiniment de 2

" u_n tend vers 2"

1) Suite convergente.

Si lorsque n devient infiniment gd, les termes u_n se rapprochent d'un réel l alors on dit que la suite (u_n) converge vers l et on note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

exple 4: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

2) Suite divergente.

Si la suite (u_n) n'est pas convergente alors on dit qu'elle diverge.

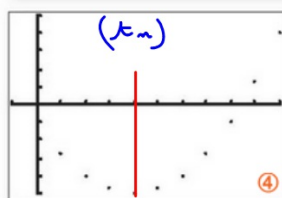
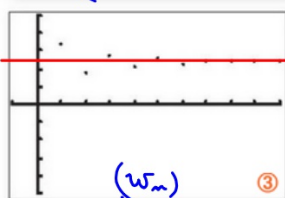
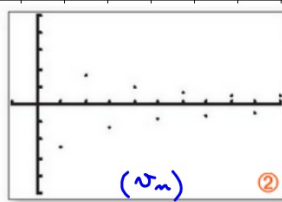
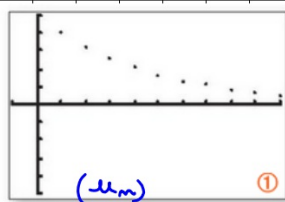
Des cas où (u_n) diverge sont :

exple 1: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

exple 2: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = \text{pas de limite}$

exple 3: $(n!)$ n'a pas de limite.

n° 53 p 157.



Conjectures :

* $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $(u_n) \searrow$.

* $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ et (v_n) non monotone.

* $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 2,5$ et (w_n) non monotone.

* $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$ et (t_n) croissante à partir de $n=L$.

